

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Katedra aplikované mechanika

**Souvislost mezi faktorem intenzity napětí a součinitelem
koncentrace napětí v případě eliptického otvoru v nekonečné
desce**

Stress Intensity Factor and Stress Concentration Factor for Elliptical Hole in
an Infinite Plate

Student:
Vedoucí bakalářské práce:

Jakub Sagáčík
Dr. Ing. Ludmila Adámková

Ostrava 2015

Zadání bakalářské práce

Student: **Jakub Sagáčík**
Studijní program: **B2341 Strojírenství**
Studijní obor: **3901R003 Aplikovaná mechanika**
Téma: **Souvislost mezi faktorem intenzity napětí a součinitelem koncentrace napětí v případě eliptického otvoru v nekonečné desce**
Stress Intensity Factor and Stress Concentration Factor for Elliptical Hole in an Infinite Plate

Zásady pro vypracování:

- 1) Vysvětlíte pojmy součinitel koncentrace napětí a faktor intenzity napětí.
- 2) Proved'te analytické řešení nekonečné desky s eliptickým otvorem.
- 3) Pomocí metody FEM stanovte součinitel koncentrace napětí.
- 4) Pomocí FEM stanovte součinitel intenzity napětí.
- 5) Srovnajte výsledky analytického a numerického výpočtu.

Seznam doporučené odborné literatury:

SADD, M.H. Elasticity. Theory, Applications, and Numerics. 2nd ed. Burlington: Academic Press, 2009. 536 p. ISBN 978- 0-12-374446-3
TIMOSHENKO, S., GOODIER, J.N. Theory of Elasticity. 2nd ed. New York. McGraw-Hill Book Company. 1951. 506 p.
KUČERA, J. Úvod do mechaniky lomu. Nestabilní lom ocelových těles při statickém a dynamickém zatížení. 1.vyd. VŠB –TU Ostrava, 2006. 297 s. ISBN 80-248-1268-1.
NĚMEC, J., DVOŘÁK, J., HOSCHL, C. Pružnost a pevnost ve strojírenství. 1.vyd. Praha, SNTL, 1989. 599s. ISBN 80-03-00193-5.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Dr. Ing. Ludmila Adámková**

Datum zadání: 13.12.2014

Datum odevzdání: 18.05.2015



doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.
vedoucí katedry



doc. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě:

.....

Podpis studenta.

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.

- беру на вѣдомі, že Vysoká škola Báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB–TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§35 odst. 3).

- souhlasím s tím, že bakalářská práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.

- bylo sjednáno, že VŠB-TUO, případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu §12 odst. 4 autorského zákona.

- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě od mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do její skutečné výše).

- беру на вѣдомі, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě:

.....

.....

Podpis studenta

Jméno a příjmení autora práce:

Jakub Sagáčík

Adresa trvalého pobytu autora práce:

Sokolská 1091, Valašské Meziříčí

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucí své bakalářské práce Dr. Ludmile Adámkové, za velkou trpělivost a poskytnutí cenných rad. Dále potom rodině za a přítelkyni za psychickou podporu.

ANOTACE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

SAGÁČIK, J. *Souvislost mezi faktorem intenzity napětí a součinitelem koncentrace napětí v případě eliptického otvoru v nekonečné desce – bakalářská práce*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra pružnosti a pevnosti, 2015, Vedoucí práce: Adámková, L.

Bakalářská práce se zabývá souvislostí mezi faktorem intenzity napětí a součinitelem koncentrace napětí v případě eliptického otvoru v nekonečné desce. Nejprve byla shrnuta teorie faktoru intenzity napětí a součinitele koncentrace napětí. Dále bylo provedeno analytické řešení pomocí Airyho funkce napětí, která je v případě desky s eliptickým otvorem definována pomocí funkcí komplexní proměnné. A nakonec byl proveden numerický výpočet metodou konečných prvků v programu Patran 2014. Výsledky analytického a numerického řešení byly mezi sebou porovnány.

Klíčová slova: Součinitel koncentrace napětí, MKP, eliptický otvor, faktor intenzity napětí

ANNOTATION OF THESIS

SAGÁČIK, J. *Stress Intensity Factor and Stress Concentration Factor for Elliptical Hole in an Infinite Plate – Bachelor Thesis*. Ostrava: VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Applied Mechanics, 2015, Thesis head: Adámková, L.

This bachelor thesis deals with the stress intensity factor and stress concentration factor for elliptical hole in an infinite plate. At first the theory of the stress intensity factor and stress concentration factor was summarized. Then the analytical solution is done using the Airy stress function, in case of plate with an elliptical hole the function is defined in complex variable. Finally the problem was solved numerically by finite element method with the software Patran 2014. The results of analytical and numerical solution are compared to each other.

Keywords: Stress concentration factor, FEM, elliptical hole, stress intensity factor

Obsah

Seznam použitých značek a symbolů	8
Úvod.....	9
1 Teoretický součinitel koncentrace napětí	9
2 Faktor intenzity napětí	12
3 Matematická teorie pružnosti	14
3.1 Vztahy matematické teorie pružnosti rovinného problému	15
4 Analytické řešení – Airyho funkce napětí	18
5 Analytické řešení součinitele koncentrace napětí.....	19
5.1 Výsledky analytického řešení součinitele koncentrace napětí	21
6 Analytické řešení faktoru koncentrace napětí	23
6.1 Výsledky analytického řešení faktoru intenzity napětí	25
7 Numerické řešení teoretického součinitele koncentrace napětí.....	27
7.1 Vytvoření sítě pro desku s eliptickým otvorem	29
7.2 Numerické výsledky pro nekonečnou desku s eliptickým otvorem.....	30
7.3 Výsledky numerického řešení teor. součinitele koncentrace napětí	34
8 Numerické řešení faktoru intenzity napětí	36
8.1 Vytvoření sítě pro desku s eliptickým otvorem	37
8.2 Výsledky numerického řešení faktoru intenzity napětí.....	38
9 Srovnání analytického a numerického výpočtu.....	39
9.1 Teoretický součinitel koncentrace napětí.....	39
9.2 Faktor intenzity napětí.....	39
10 Souvislost mezi součinitelem koncentrace napětí a faktorem intenzity napětí	40
11 Závěr	41
Seznam použité literatury	43

Seznam použitých značek a symbolů

Označení	Název	Jednotka
ε	Poměrné prodloužení	[-]
E	Modul pružnosti v tahu	[MPa]
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Napětí v kartézských souřadnicích	[MPa]
μ	Poissonovo číslo	[-]
α_t	Teoretický součinitel koncentrace napětí	[-]
σ_{Max}	Maximální napětí	[MPa]
σ_{Nom}	Nominální napětí	[MPa]
a	Hlavní poloosa elipsy	[mm]
ρ	Poloměr zakřivení kořene vrubu	[mm]
b	Vedlejší poloosa elipsy	[mm]
K	Faktor intenzity napětí	[MPa \sqrt{m}]
τ	Smykové napětí	[MPa]
u, v, w	Složky posuvů	
x, y, z	Osy kartézského souřadnicového systému	
X,Y	Objemové složky sil	[N/m ³]
∇	Laplaceův operátor	
ϕ	Funkce napětí	
r	Radiusvektor polárního souřadnicového systém	[mm]
θ	Úhel polárního souřadnicového systému	[rad]
Re	Reálná část komplexního čísla	[-]
Im	Imaginární část komplexního čísla	[-]
Z, Z ₁ , Z ₂	Diferencovatelné (analytické) funkce	
l	Délka trhliny	[mm]
Y	Funkce tvaru a způsobu zatížení trhliny	[-]
G	Hnací síla trhliny	[MN/m]

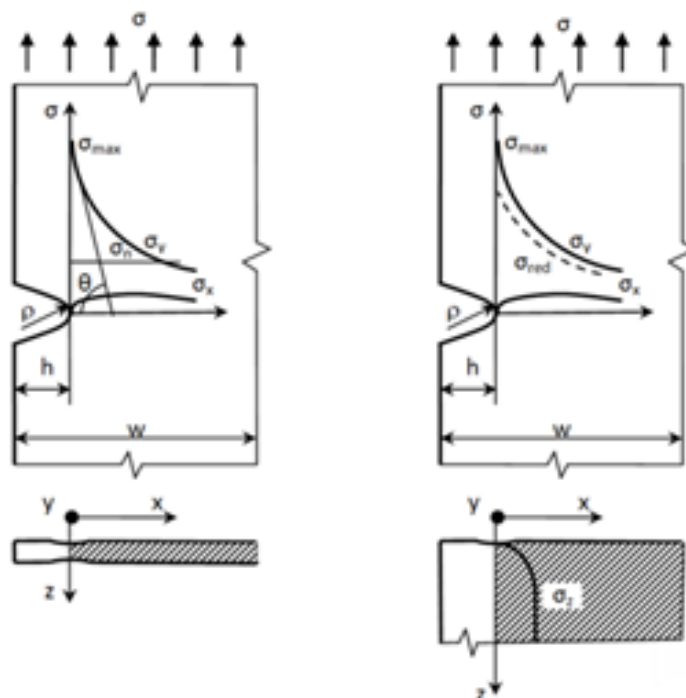
Úvod

Cílem této bakalářské práce je určit souvislost mezi faktorem intenzity napětí a součinitelem koncentrace napětí při eliptickém otvoru v nekonečné desce. Při posuzování spolehlivosti konstrukcí je nutné znát co nejpřesnější hodnoty napětí. Pro výpočet analytického řešení napětí se využívá matematické teorie pružnosti. Pro stroje a součásti, které jsou velmi důležité svou funkcí v provozu, se dané výsledky porovnávají s experimentálními zkouškami. V pevnostních výpočtech je možná odchylka do 10 % oproti reálnému stavu.

1 Teoretický součinitel koncentrace napětí

Na většině strojních součástí se setkáme s vruby. Ty se dělí na konstrukční a strukturální. Rozdíl mezi nimi je ten, že strukturální vruby vznikají neplánovaně technologií výroby. Konstrukční vruby jsou důležité z hlediska funkce zařízení. Jako příklad lze uvést drážku pro pero, osazení, zápich a jiné. Mezi strukturální vruby se řadí různé nehomogenity materiálu, jako jsou poruchy (čárové, bodové, plošné), dutiny, trhliny, vměstky, bubliny apod. Při tahovém napětí se mění tyto trhliny v elipsu. V obou případech dochází ke vzniku víceosé napjatosti. Ve větší vzdálenosti od vrubů je rozložení napětí již rovnoměrné. Tento princip definoval Jean Claude Barré de Saint-Venant a popisuje, že: "V dostatečné vzdálenosti od působíště vnější síly, případně náhlé změny tvaru, je rozložení napětí a deformace nezávislé na způsobu přiložení vnější síly, případně na změně tvaru." [1]

Průběhy napětí v kořeni vrubu



Obr. 1 Průběhy napětí v kořeni vrubu [2]

Na obrázku č.1 je uveden průběh napětí v kořeni vrubu tažené desky. U tenké desky vzniká rovinná napjatost. Vyjadřuje nám, že rozměr v ose z je malý oproti ostatním rozměrům desky, tudíž můžeme napětí v této ose zanedbat ($\sigma_z = 0$). Zatímco u tlusté desky vzniká rovinná deformace ($\varepsilon_z = 0$). Pokud poměrné prodloužení v Hookeově zákoně pro trojosou napjatost položíme rovno nule, vyjde nám $\sigma_z = \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$, viz rovnice (1.1)

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] = 0 \rightarrow \sigma_z = \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \quad (1.1)$$

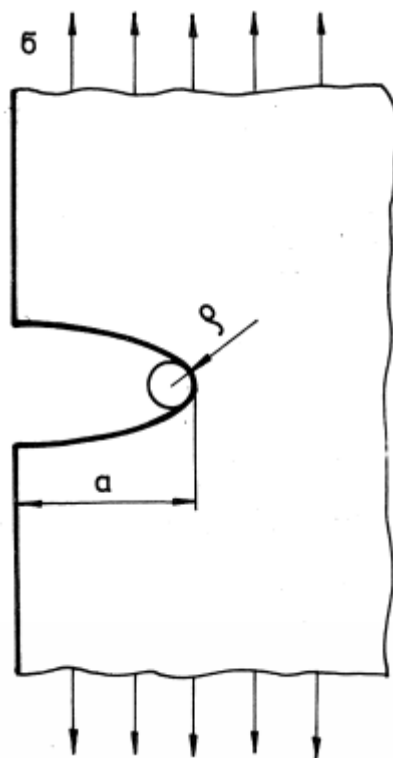
Teoretický součinitel koncentrace napětí, vyjadřující přírůstek napětí účinkem vrubu, je definován jako poměr špičky napětí v kořeni vrubu k nominálnímu napětí v průřezu bez vrubu.

$$\alpha_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \quad (2.2)$$

Pro eliptický otvor v nekonečné desce je teoretický součinitel vyjádřen vzorcem

$$\alpha_t = 1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (1.3)$$

, kde ρ je poloměr zakřivení kořene vrubu, a je hlavní poloosa elipsy (hloubka vrubu) viz Obr. 2.



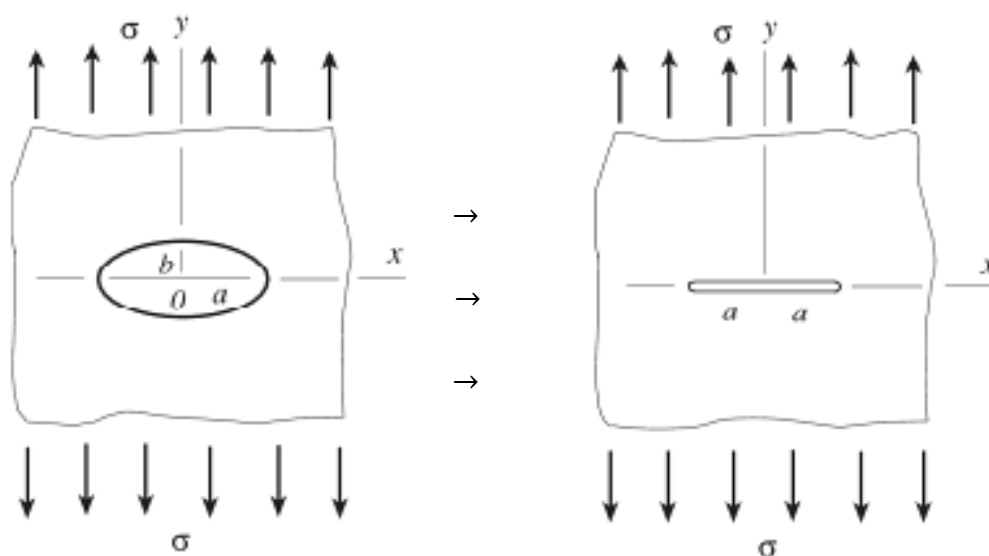
Obr. 2 [3]

Z rovnice (1.3) je patrná závislost teoretického součinitele koncentrace napětí na poloměru zakřivení kořene vrubu a jeho hloubce.

Speciální případ nastává, pokud je otvor kruhový, pak se $a = \rho$. Při dosazení do vzorce (1.3) vyjde teoretický součinitel koncentrace napětí $\alpha_t = 3$.

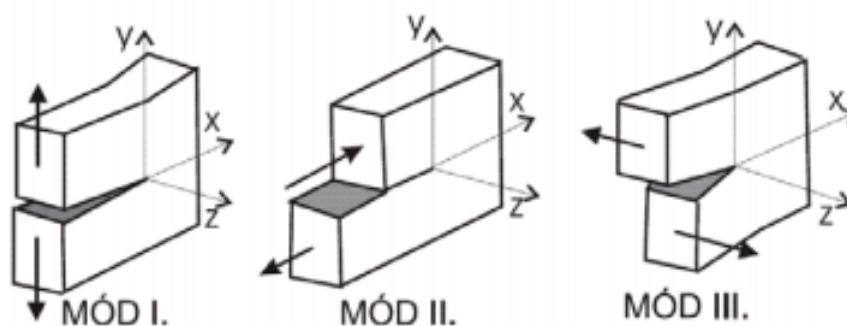
2 Faktor intenzity napětí

Je uvažována nekonečná deska s eliptickým otvorem, jejíž hlavní poloosa je a , vedlejší poloosa je b . Pokud se vedlejší poloosa b blíží k nule, tak eliptický otvor přejde v trhlinu s délkou $2a$. Můžeme ji brát jako vrub s maximální ostrostí kořene.



Obr. 3 Přejít elipsy v trhlinu[4]

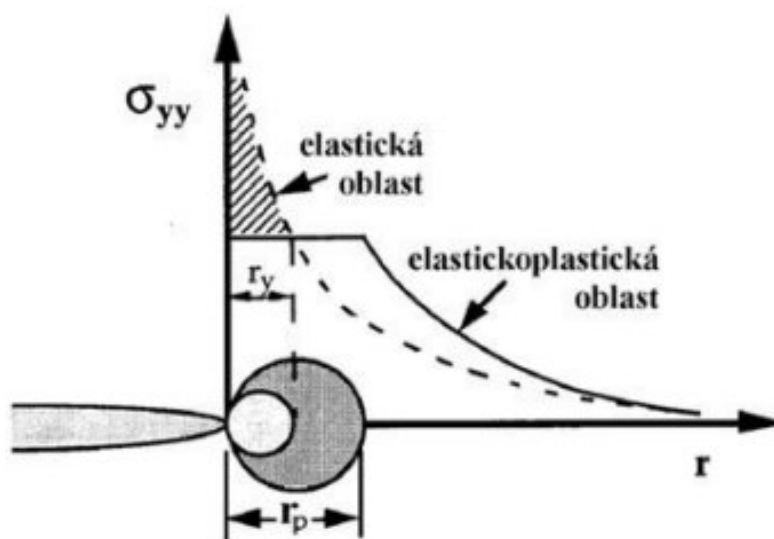
Faktor intenzity napětí K popisuje napjatost v okolí trhliny. Ta může být namáhána třemi mody zatížení. Modem I – tahovým, modem II – smykovým, modem III – stříhovým. V modu I je trhlina zatěžována silou, která působí rovnoběžně s osou y . V modu II je trhlina zatěžována silou, působící rovnoběžně s osou x a v modu III je trhlina zatěžována silou, působící rovnoběžně s osou z (viz. Obr. 4).



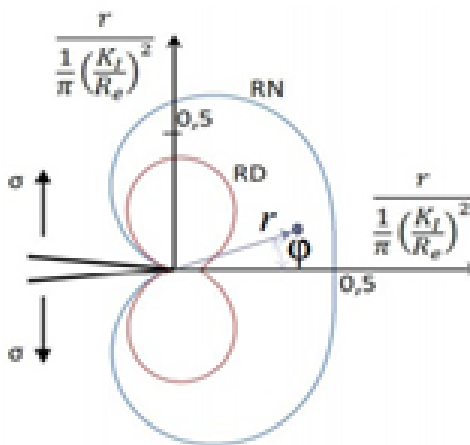
Obr. 4 Typy zatěžování trhliny[5]

Podle K-koncepcce se bude trhlina šířit, pokud faktor intenzity napětí K dosáhne své kritické hodnoty K_c . Tato hodnota je nazývána lomovou houževnatostí materiálu a charakterizuje odpor proti šíření trhliny ve stavu rovinné deformace. V praxi se udává bezpečnost k v hodnotě $k = 3 \div 4$, jakožto podíl lomové houževnatosti materiálu K_c a faktoru intenzity napětí K .

Blíží-li se poloměr zakřivení čela trhliny k nule, pak u čela trhliny vzniká tzv. Singulární oblast, ve které se předpokládá nekonečně velké napětí v kořeni trhliny a vznik malé plastické zóny kruhového tvaru (viz Obr. 5). Pro mód I je tvar plastické zóny uveden na Obr. 6.



Obr. 5 Vznik plastické zóny u čela trhliny[6]



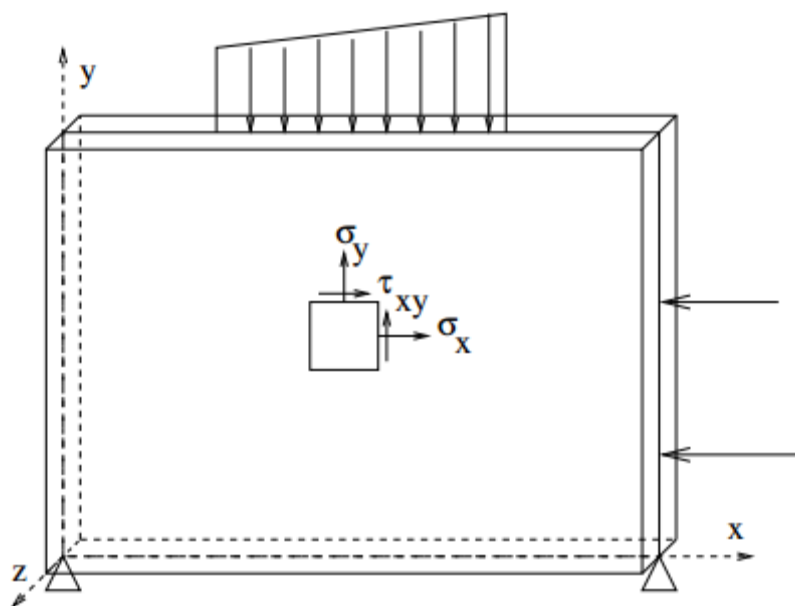
Obr 6. Tvar plastické zóny pro mód I[7]

3 Matematická teorie pružnosti

V této kapitole bude shrnuta podstata matematické teorie pružnosti, jejíž znalost je důležitou součástí při řešení této úlohy.

Obečné řešení příkladů prostorových těles je obtížné, proto se jej snažíme zjednodušit na rovinné úlohy, abychom dosáhli určitého zjednodušení. V matematické teorii pružnosti existují dva typy rovinných úloh.

Rovinná napjatost - Při některých úlohách se setkáváme s případem, kdy jeden rozměr dané součásti je podstatně menší než zbývající dva rozměry a také zatížení dané konstrukce a okrajové podmínky leží v jedné rovině (viz Obr. 7 – rovina x-y). Jako příklad bych mohl uvést nosné stěny nebo tenkou desku. V tomto případě lze úlohu idealizovat na úlohu 2D.



Obr. 7 Nosná stěna[8]

Pro tuto rovinu (viz Obr. 7) můžeme napsat tyto vztahy

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0 \quad 3.1$$

Rovinná deformace – Jako rovinnou deformaci můžeme vzít v úvahu tělesa větší šířky než v případě rovinné napjatosti, jejíž posuv v jednom směru je nulový. Posuvy v dalším směru jsou nezávislé na jedné souřadnici. Dále předpokládáme, že místo, které vyšetřujeme, se nachází ve velké vzdálenosti od konců tělesa. Pro rovinu x-y můžeme napsat tyto vztahy

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0 \quad 3.2$$

3.1 Vztahy matematické teorie pružnosti rovinného problému

Tyto rovnice můžeme rozdělit do třech typů

- Rovnice podmínek rovnováhy
- Geometricko-deformační rovnice
- Fyzikální rovnice

Rovnice podmínek rovnováhy (Statické)

Tyto rovnice nám popisují podmínky rovnováhy, které předepisujeme na malý element vybraný z tělesa. Rovnice rovnováhy v kartézském souřadném systému můžeme zapsat pomocí vztahů (3.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \quad 3.3$$

, kde neznámé X a Y nám označují objemové složky sil

Geometricko-deformační rovnice (Cauchyho)

Tyto rovnice, jenž popisují vztahy mezi poměrnými deformacemi a posuvy, se dají pro rovinnou úlohu zredukovat pouze na tři, a ty můžeme pro kartézské souřadnice zapsat ve tvaru (3.4).

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\tag{3.4}$$

Fyzikální rovnice

Tyto rovnice nám popisují vztahy mezi geometrickými rovnicemi a rovnicemi rovnováhy. Můžeme je zapsat v tomto tvaru

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x] \\ \varepsilon_z &= -\frac{1}{E} [\mu \cdot \sigma_x + \mu \cdot \sigma_y] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}\end{aligned}\tag{3.5}$$

, kde μ je Poissonova konstanta, jejíž hodnota pro oceli je $\mu = 0.3$, E je modul pružnosti v tahu, neboli Youngův modul a pro konstrukční ocel má hodnotu $E=210\,000$ MPa, G je modul pružnosti ve smyku.

Rovnice číslo (3.5) lze zapsat i v inverzním vztahu pro výpočet napětí

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \gamma_{xy}\end{aligned}\tag{3.6}$$

Okrajové podmínky

Nezbytnou součástí každé úlohy jsou okrajové podmínky. Ty předepisují způsoby zatížení tělesa, popřípadě uchycení tělesa. Můžeme je rozdělit na dva druhy :

- Statické okrajové podmínky – ty nám předepisují způsoby zatížení tělesa (tah, tlak, síla apod.)
- Geometrické okrajové podmínky – ty nám předepisují způsoby uchycení tělesa (vetknutí, kloubové vazby apod.)

4 Analytické řešení – Airyho funkce napětí

Této funkce napětí se využívá pro řešení stavu napjatosti u rovinných úloh. Tato funkce, dále označená jako ϕ , musí splňovat statické rovnice podmínek rovnováhy a rovnici kompatibility, kterou můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad 4.1$$

a po úpravě je možno tuto rovnici napsat ve tvaru

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad 4.2$$

, kde ∇^2 je Laplaceův operátor, potom můžeme napsat vztahy složek napětí, které jsou vyjádřené právě přes Airyho funkci napětí

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad 4.3$$

a dosazením vztahů (číslo) do rovnice kompatibility (číslo) nám vyjde vztah

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad 4.4$$

Při řešení například nekonečné desky s kruhovým otvorem, která je tažená napětím v nekonečnu, se často tento vztah (4.4) uvádí v polárních souřadnicích r a θ .

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \phi = 0 \quad 4.4$$

5 Analytické řešení součinitele koncentrace napětí

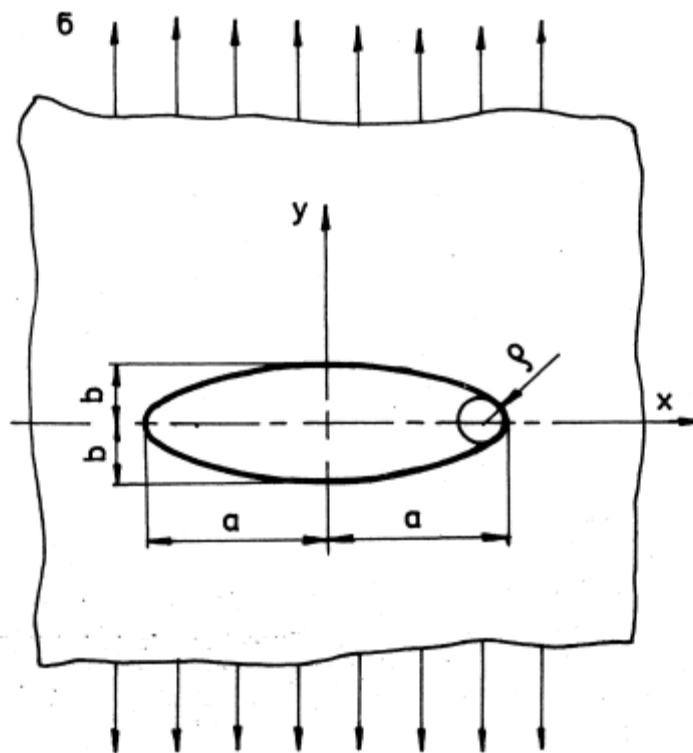
Pro případ nekonečné desky s kruhovým otvorem je možno nalézt řešení pomocí Airyho funkce napětí v polárních souřadnicích a určit teoretický součinitel koncentrace napětí $\alpha_t = 3$ [-]. V případě, že je řešení mnohem složitější, je řešena Airyho funkce napětí pomocí komplexní proměnné. Tento postup v matematické teorii pružnosti zpracoval N.I. Muschelischvili. Vyjádřil Airyho funkci pomocí dvou komplexních potenciálů ve tvaru

$$\phi = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi_1(z) + \chi_1(z)] \quad 5.1$$

, kde Re vyjadřuje reálnou část komplexního čísla a \bar{z} vyjadřuje komplexní sdruženou nezávislou proměnnou $\bar{z} = x - i \cdot y$ (kde $i = \sqrt{-1}$). Abychom mohli řešit rovinné úlohy v pružnosti, musíme nalézt tyto komplexní potenciály $\varphi_1(z)$ a $\chi_1(z)$. Řešení je možno nalézt v literatuře [10]. Pro případ elipsy v nekonečné desce namáhané tahem je teoretický součinitel koncentrace napětí pro hlavní vrchol elipsy roven

$$\alpha_t = 1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{\rho}} = 1 + 2 \cdot \frac{a}{b} \quad 5.2$$

, kde l je hlavní poloosa elipsy, a je vedlejší poloosa elipsy a ρ je poloměr zakřivení kořene vrubu (viz Obr. 8). Ze vzorce (5.2) vyplývá, že poloměr zakřivení kořene vrubu $\rho = \frac{b^2}{a}$.



Obr. 8 Nekonečná deska s eliptickým otvorem[3]

Pro koncentraci napětí ve vedlejším vrcholu elipsy platí, že není závislá na geometrii vrubu a je stejná pro všechny velké oskulační kružnice a je rovna -1.

5.1 Výsledky analytického řešení součinitele koncentrace napětí

V tabulce 1 jsou uvedeny výsledky analytického řešení napětí při různém poměru délky vedlejší poloosy elipsy b a délky hlavní poloosy elipsy a (viz Obr 8). Maximální napětí je počítáno podle vzorce (5.3). Minimální hodnota napětí je stejná pro všechny případy poměrů stran vedlejší poloosy a hlavní poloosy elipsy.

$$\sigma_{Max} = \sigma \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{a}{b}\right) \quad 5.3$$

Tab. 1 Výsledky analytického výpočtu napětí

Poměr b/a	Výsledné napětí [MPa]	
	σ_{Max}	σ_{Min}
1	300	-100
0,9	322,2	-100
0,8	350	-100
0,7	385,7	-100
0,6	433,3	-100
0,5	500	-100
0,4	600	-100
0,3	766,7	-100

V tabulce 2 jsou uvedeny výsledky analytického řešení součinitele koncentrace napětí při různém poměru délky vedlejší poloosy b a délky hlavní poloosy elipsy a . Tento součinitel je vypočítán jako podíl maximálního napětí vůči zatěžujícímu napětí.

$$\alpha_t = \frac{\sigma_{Max}}{\sigma} \quad 5.4$$

Tab. 2 Výsledky analytického řešení teoretického součinitele koncentrace napětí

Poměr b/a	α_t
1	3
0,9	3,22
0,8	3,5
0,7	3,857
0,6	4,333
0,5	5
0,4	6
0,3	7,667

6 Analytické řešení faktoru koncentrace napětí

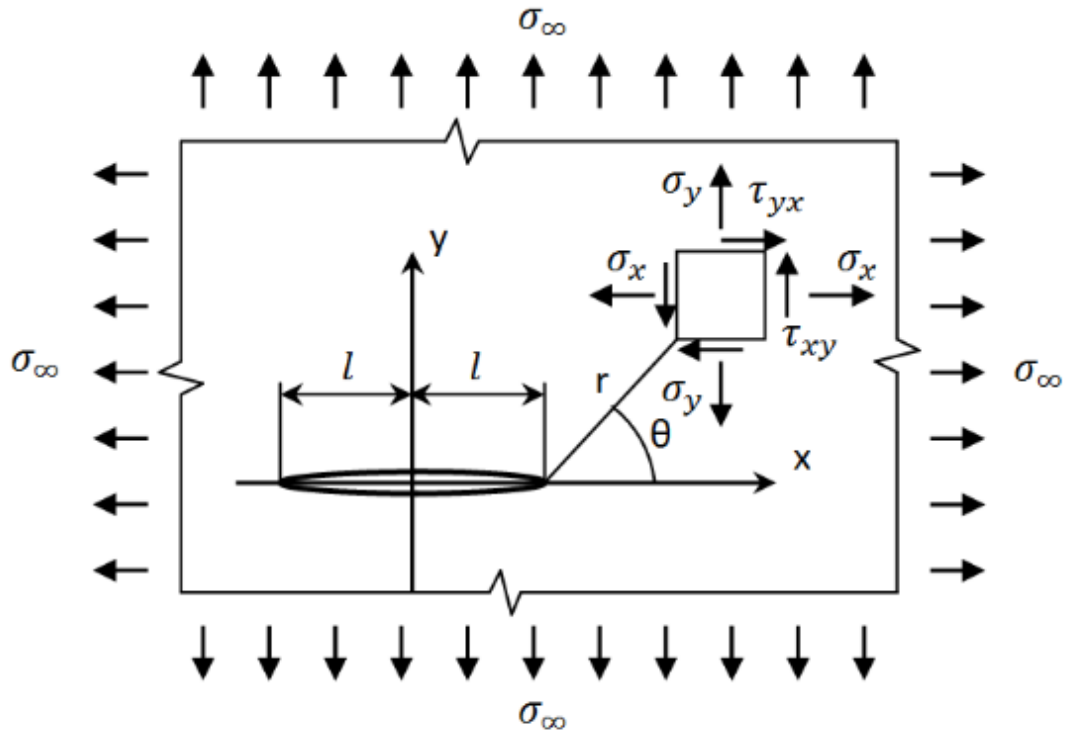
Analytickým řešením faktoru koncentrace napětí se zabýval Irwin, vycházel na základě Westergaardovy funkce napětí. Jde zde uvedeno pouze odvození pro Mod I, protože ten je řešen v této bakalářské práci na dané úloze. Toto řešení platí v intervalu $\rho \leq r \leq 1$, kde ρ je poloměr zaoblení kořene trhliny. Funkci napětí $\phi(x, y)$ můžeme podle Westergaarda zapsat pomocí komplexní proměnné $z = x + i \cdot y$

$$\phi = \operatorname{Re} Z_2 + y \cdot \operatorname{Im} Z_1 \quad 6.1$$

,Re vyznačuje reálnou část komplexní funkce, a Im vyznačuje imaginární část. Diferencovatelné (analytické) funkce Z_2 , Z_1 a Z jsou popsány a vyhovují těmto vztahům

$$\begin{aligned} \frac{dZ_2}{dz} &= Z_1 \\ \frac{dZ_1}{dz} &= Z \end{aligned} \quad 6.2$$

Celé řešení je uvedeno v literatuře [10]. Pro případ trhliny v nekonečné desce zatížené dle Obr. 9 jsou výsledné hodnoty napětí a posuvů pro mód I popsány vzorci (6.3).



Obr. 9 Trhlina zatížená tahovým a smykovým napětím[7]

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}\tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}u &= \frac{K_I}{2G_s} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(k - 1 + 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ v &= \frac{K_I}{2G_s} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(k + 1 - 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \right)\end{aligned}$$

Předpokládejme mód zatěžování I, a úhel $\theta = 0^\circ$, pak

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos 0 (1 - \sin 0 \cdot \sin 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\tag{6.4}$$

,kde K_I je faktor intenzity napětí pro mod I, který popisuje napjatost v okolí trhliny a lze ho spočítat podle vzorce (6.5)

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot l} \quad 6.5$$

,kde l je délka trhliny (viz. Obr.9).

6.1 Výsledky analytického řešení faktoru intenzity napětí

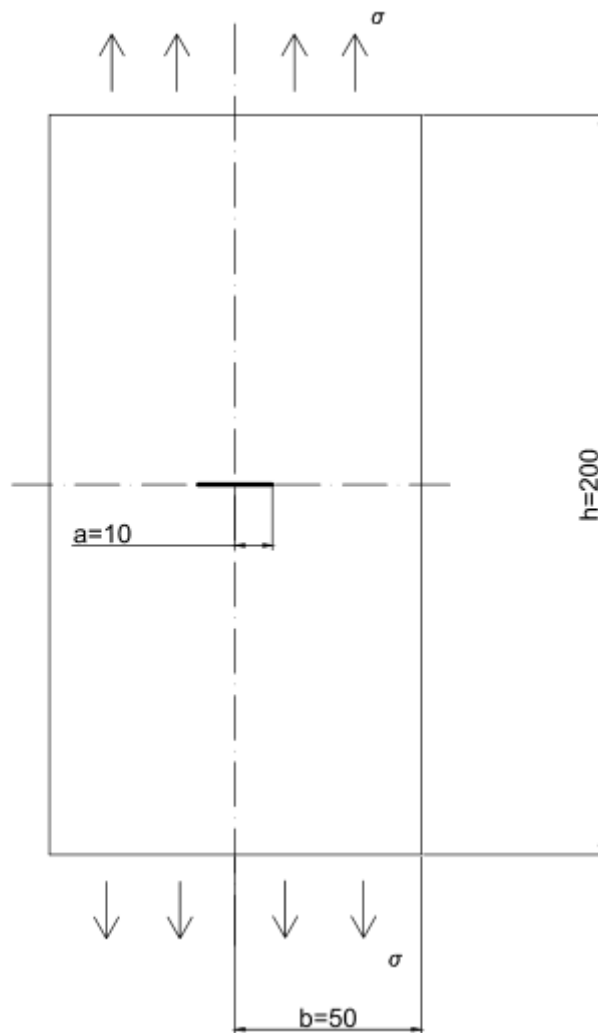
Faktor intenzity napětí pro mód I je počítán podle vzorce (6.6)

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi l} \cdot Y \quad 6.6$$

, kde Y je funkce tvaru a způsobu zatížení trhliny a spočítá se pro danou geometrii viz Obr. 10 vzorcem (6.7)

$$Y = \frac{1 - 0.5 \cdot \alpha + 0.362 \cdot \alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha}} \quad 6.7$$

, kde $\alpha = \frac{a}{b}$



Obr. 10 Geometrie modelu desky s trhlinou pro výpočet faktoru intenzity napětí

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi l} \cdot Y = 18,122 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

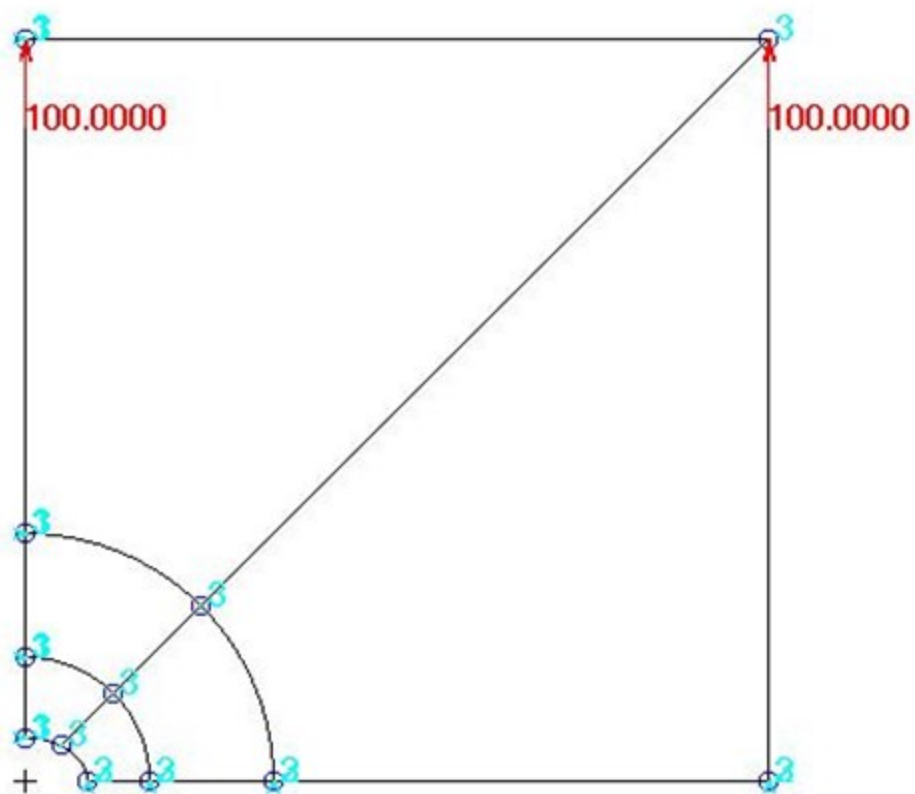
7 Numerické řešení teoretického součinitele koncentrace napětí

Pro výpočet této úlohy byl zvolen výpočetní program Patran 2014, který patří mezi nejrozšířenější pre/post processingy pro analýzu konečných prvků. Má rozšířenou nabídku řešičů jako je třeba ANSYS, Marc, Abaqus, MSC Nastran apod. V mém případě byl zvolen řešič MSC Nastran.

Při tvorbě modelu je využito symetrie úlohy, takže se celá geometrie modelu zjednoduší na čtvrtinu. Je nutné předepsat okrajové podmínky, pokud se zavede toto zjednodušení. Dále je tato úloha řešena jako rovinná, pro více druhů geometrií, které jsou upravené tak, že od kruhového otvoru postupně přechází v elipsovité otvor zmenšováním vedlejší poloosy elipsy b , která je rovnoběžná se směrem zatížení (viz Obr. 8). Pro výpočet hodnot teoretického součinitele koncentrace napětí je namodelováno osm druhů geometrií. Celý model je rozdělen na izoparametrické plochy, a to z důvodu kvalitnějšího síťování.

Důležitou věcí při modelování jsou okrajové podmínky. Zde je z důvodu zjednodušení geometrie na polovinu zabráněn posuv ve směru osy x , pak v ose y a nakonec i v ose z . Další předepsanou okrajovou podmínkou (statickou) je tah desky -100 [MPa]. Minus u této hodnoty značí, že se jedná o tah, protože funkce Edge Pressure, která je využita pro 2D model a umístěna na horní hranu modelu, má nastaveno kladnou hodnotu pro tlak a zápornou pro tah. Dále je nadefinován materiál isotropní a to ocel s modulem pružnosti $E=210\,000$ [MPa] a Poissonovou konstantou $\mu=0,3$ [-].

Na obrázku č.11 je zobrazena úprava geometrie nekonečné desky s eliptickým otvorem, konkrétně pro poměr $\frac{b}{a} = 0,7$, kde b je vedlejší poloosa elipsy, a je hlavní poloosa elipsy, včetně zadání okrajových podmínek a rozdělení na izoparametrické plochy.



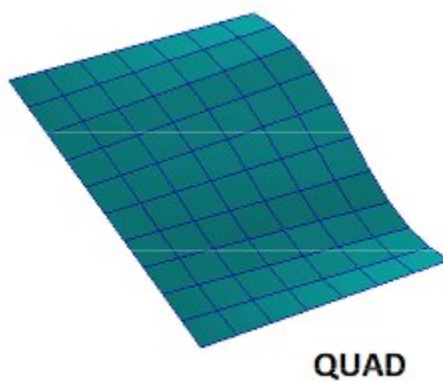
Obr č. 11 Geometrie modelu nekonečné desky s eliptickým otvorem

7.1 Vytvoření sítě pro desku s eliptickým otvorem

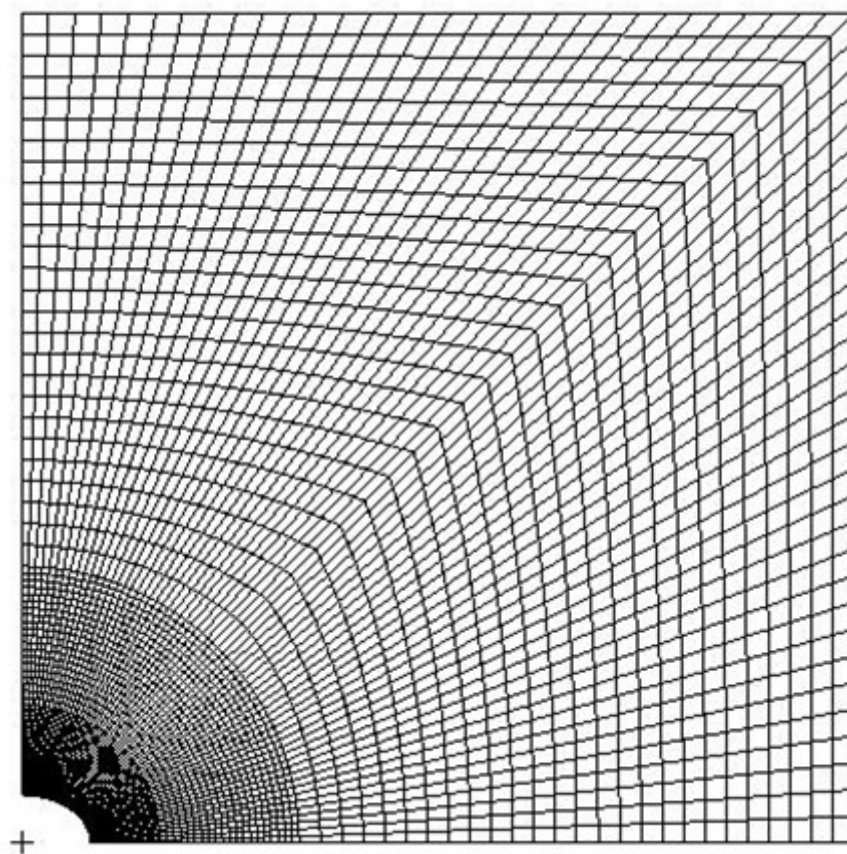
Sít' je pro tento model vytvářena tak, aby byla nejhustší v okolí otvoru, a se zvětšující se vzdáleností od otvoru je řidší, protože v těch místech je výsledek již méně podstatný.

Model je rozdělen na izoparametrické plochy, které jsou síťovány prvkem typu QUAD4 (viz Obr 12). Jelikož je model rozdělen, je nutné provést ekvivalenci uzlů, která sloučí totožné uzly do jednoho a dojde ke spojení sítí modelu.

Na obrázku č.13 je zobrazená síť modelu desky s eliptickým otvorem.



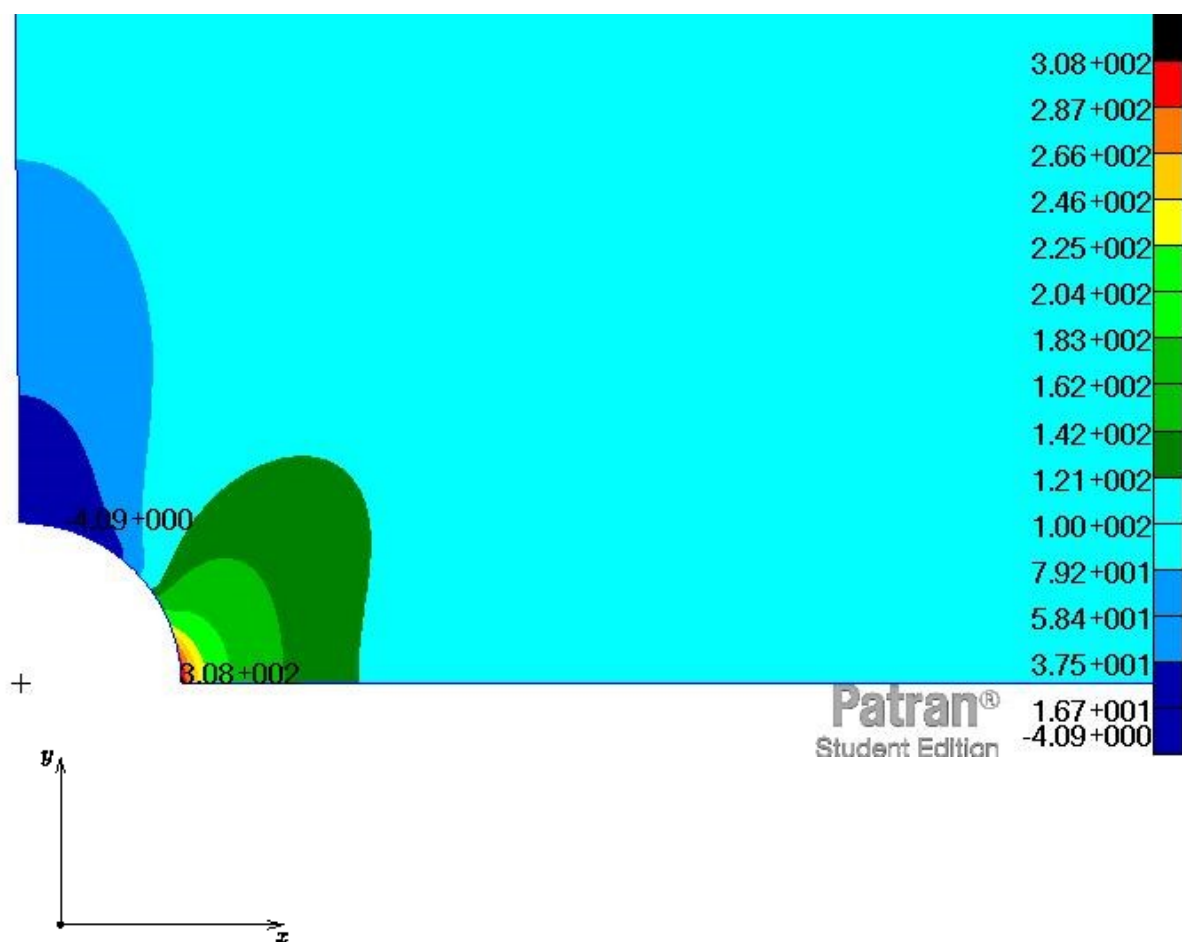
Obr 12 Prvek typu QUAD[9]



Obr. č. 13

7.2 Numerické výsledky pro nekonečnou desku s eliptickým otvorem

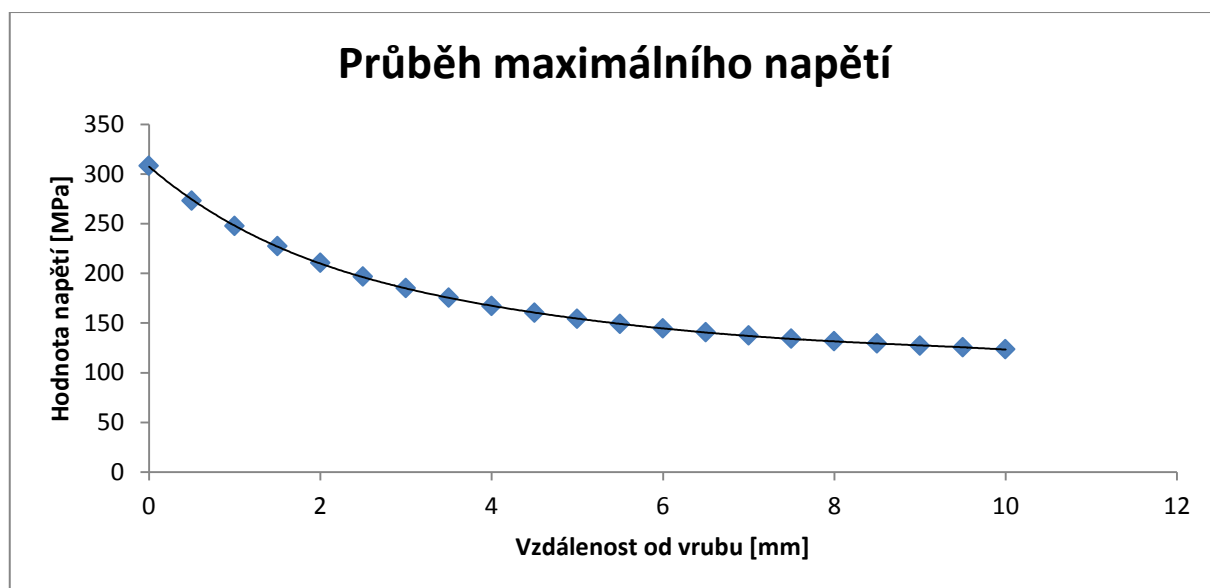
Na obr. č.14 je uveden průběh maximálního napětí v nekonečné desce s kruhovým otvorem, tažené napětím $\sigma = 100$ [MPa] ve směru osy y. Maximální hodnota napětí se nachází na průniku kruhového otvoru s osou x a má hodnotu 308 [MPa]. Minimální hodnota napětí se nachází na průniku kruhového otvoru s osou y a má hodnotu -105 [MPa].



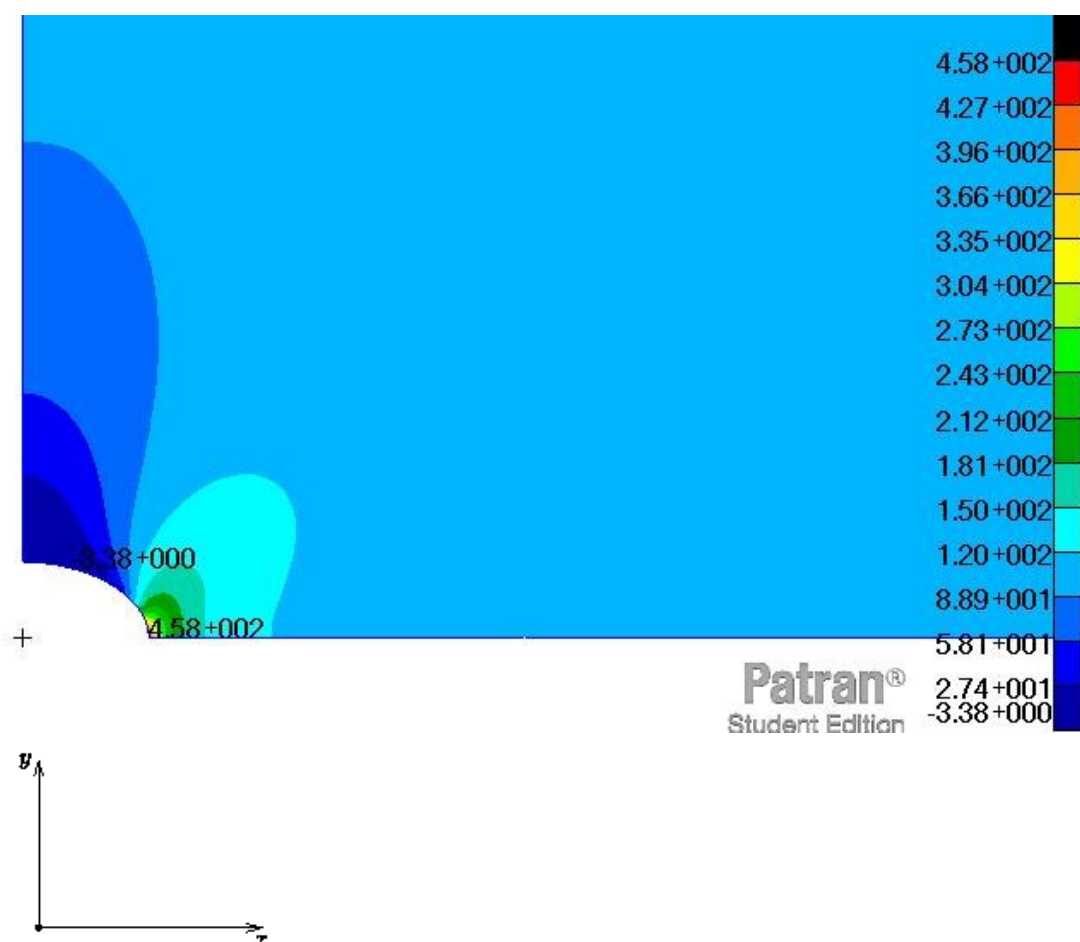
Obr. č 14

V grafu č.1 je vykreslen průběh maximálního napětí v ose y nekonečné desky s kruhovým otvorem při jednoosém namáhání.

Graf 1 Průběh maximálního napětí v ose y nekonečné desky s kruhovým otvorem



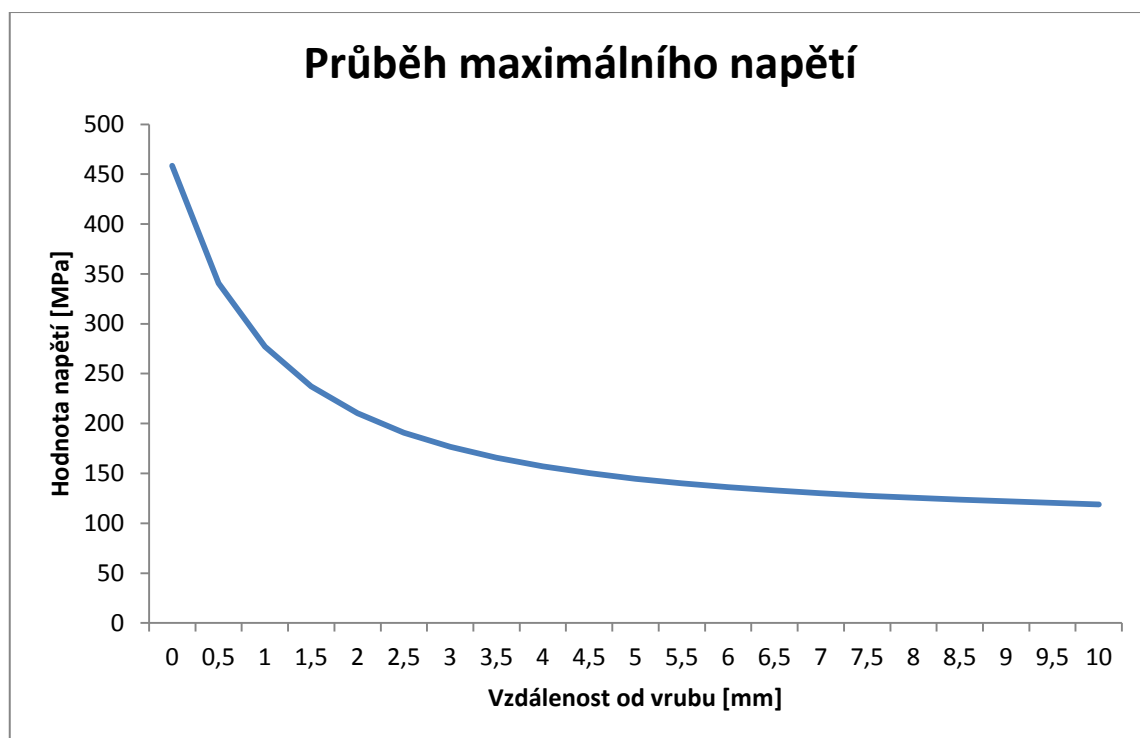
Na obrázku č.15 je uvedena hodnota maximálního napětí nekonečné desky s eliptickým otvorem, tažené napětím $\sigma = 100$ [MPa] ve směru osy y, s poměrem stran $b/a = 0,6$ (viz Obr.9). Maximální napětí má hodnotu 458 [MPa] a nachází se ve vrcholu hlavní poloosy elipsy a. Minimální napětí -104 [MPa] a nachází se ve vrcholu vedlejší poloosy elipsy b.



Obr. 15

V grafu č.2 je uveden průběh maximálního napětí v ose y při nekonečné desce s eliptickým otvorem s poměry stran $b/a = 0,6$.

Graf 2 Průběh maximálního napětí v ose y nekonečné desky s eliptickým otvorem



7.3 Výsledky numerického řešení teor. součinitele koncentrace napětí

V tabulce č.3 jsou uvedeny výsledky numerického řešení pro nekonečnou desku s otvorem při různém poměru délky vedlejší poloosy elipsy b a délky hlavní poloosy elipsy a .

Tab. 3 Výsledky numerického řešení napětí

Poměr b/a	Výsledné napětí [Mpa]	
	σ_{Max}	σ_{Min}
1	308	-105
0,9	308	-101
0,8	369	-105
0,7	407	-105
0,6	458	-104
0,5	527	-104
0,4	627	-103
0,3	768	-103

V tabulce č.4 jsou uvedeny numerické výsledky teoretického součinitele koncentrace napětí pro nekonečnou desku s otvorem při různém poměru délky vedlejší poloosy elipsy b a délky hlavní poloosy elipsy a .

Tab 4 Výsledky numerického řešení teoretického součinitele koncentrace napětí

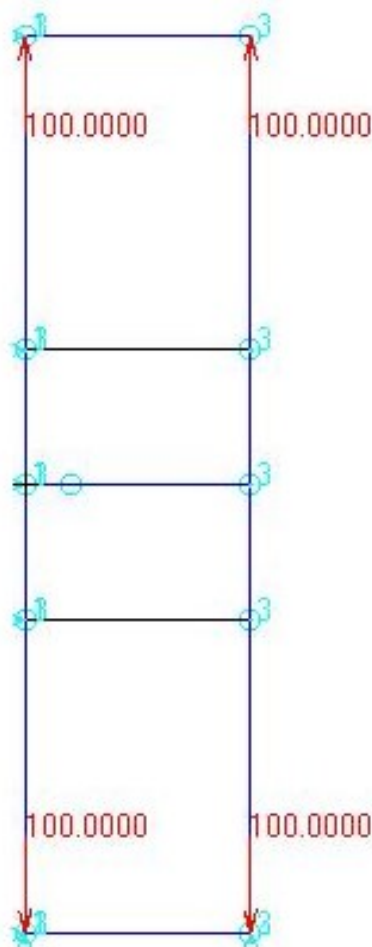
Poměr b/a	α_t
1	3,08
0,9	3,08
0,8	3,69
0,7	4,07
0,6	4,58
0,5	5,27
0,4	6,27
0,3	7,68

8 Numerické řešení faktoru intenzity napětí

Při tvorbě modelu je využito symetrie úlohy, takže se celá geometrie modelu zjednoduší na polovinu. Je nutné předepsat okrajové podmínky, pokud se zavede toto zjednodušení. Dále je tato úloha řešena jako rovinná, pro jeden druh geometrie desky s trhlinou. Zde je z důvodu zjednodušení geometrie na polovinu zabráněn posuv ve směru osy x, pak v ose y a nakonec i v ose z. Další předepsanou okrajovou podmínkou (statickou) je předepsán desky -100 [MPa]. Minus u této hodnoty značí, že se jedná o tah, protože funkce Edge Pressure, která je využita pro 2D model a umístěna na horní hranu modelu, má nastaveno kladnou hodnotu pro tlak a zápornou pro tah. Dále je nadefinován materiál isotropní a to ocel s modulem pružnosti $E = 210\,000$ [MPa] a Poissonovou konstantou $\mu=0,3$ [-] a deska je definována pro rovinnou napjatost (Plain stress) s tloušťkou 5mm. Trhlina je modelována pomocí funkce Crack (VCCT). Touto funkcí je řešič schopen vypočítat hnací sílu trhliny G . Vztahem (8.1) lze spočítat faktor intenzity napětí K .

$$K_I = \sqrt{G \cdot E} \quad 8.1$$

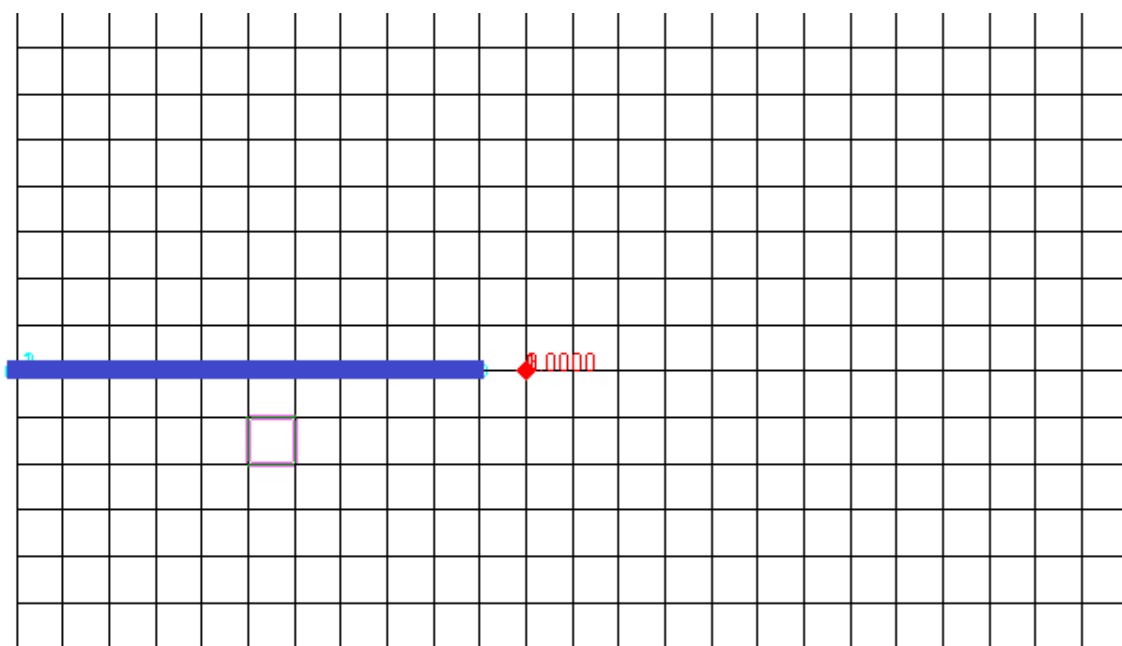
Na obr. 16 lze vidět úpravu modelu pro výpočet faktoru intenzity napětí.



Obr. 16

8.1 Vytvoření sítě pro desku s eliptickým otvorem

Síť v okolí trhliny je hustší, ve větší vzdálenosti od trhliny je řidší. Není zde provedena ekvivalence všech uzlů a to v místě trhliny, aby došlo k rozevření této trhliny. Funkce typu Crack (VCCT) je použita na 1. svázaný uzel za trhlinou viz (Obr. 17.). Modře je zde znázorněna trhlina a červeně uzel, na který je použita funkce Crack (VCCT).



Obr. 17

8.2 Výsledky numerického řešení faktoru intenzity napětí

Pro výpočet tohoto modelu je použit řešič 400 Implicit nonlinear. Výsledná hodnota hnací síly trhliny $G = 1.552$ [MN/m]. Tuto hodnotu lze dosadit do vztahu (8.1) a faktor intenzity napětí vyjde $K = 18,053 \text{ MPa}\sqrt{m}$.

9 Srovnání analytického a numerického výpočtu

Srovnání analytického a numerického výpočtu je provedeno pomocí odchylky. Ta je stanovena pomocí rovnice (9.1)

$$\Delta\sigma = \left| \frac{\text{Analytický výpočet} - \text{Numerický výpočet}}{\text{Analytický výpočet}} \right| \cdot 100 [\%] \quad 9.1$$

9.1 Teoretický součinitel koncentrace napětí

V tabulce č.5 jsou uvedeny srovnání analytického a numerického výpočtu teoretického součinitele koncentrace napětí. Je zde také vypočtena odchylka.

Tab. 5 Srovnání analytického a numerického výpočtu teoretického součinitele koncentrace napětí

Poměr b/a	Analytické řešení [-]		Numerické řešení [-]		Odchylka [%]	
	$\frac{\sigma_{Max}}{\sigma}$	$\frac{\sigma_{Min}}{\sigma}$	$\frac{\sigma_{Max}}{\sigma}$	$\frac{\sigma_{Min}}{\sigma}$	$\frac{\sigma_{Max}}{\sigma}$	$\frac{\sigma_{Min}}{\sigma}$
1	3	-1	3,08	-1,05	2,66	5
0,9	3,22	-1	3,08	-1,01	4,347	1
0,8	3,5	-1	3,69	-1,05	5,428	5
0,7	3,857	-1	4,07	-1,05	5,522	5
0,6	4,333	-1	4,58	-1,04	5,7	4
0,5	5	-1	5,27	-1,04	5,4	4
0,4	6	-1	6,27	-1,03	4,5	3
0,3	7,667	-1	7,68	-1,03	0,169	3

9.2 Faktor intenzity napětí

V tabulce č.6 je uvedeno srovnání analytického a numerického výpočtu faktoru intenzity napětí. Je zde také vypočtena odchylka.

Tab. č.6 Srovnání analytického a numerického řešení faktoru intenzity napětí

Faktor intenzity napětí		odchylka [%]
Analytické řešení [MPa√m]	Numerické řešení [MPa√m]	
18,122	18,053	0,38

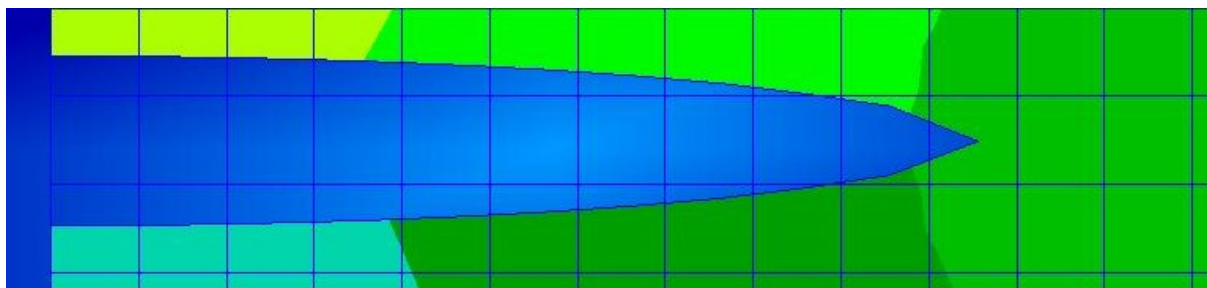
10 Souvislost mezi součinitelem koncentrace napětí a faktorem intenzity napětí

Faktor intenzity napětí a součinitel koncentrace napětí spojuje Irwin-Neuberův vztah (10.1). Tímto vztahem lze popsat ostré konstrukční vruby.

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \alpha_t \cdot \sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot \rho} \quad 10.1$$

, kde σ_n je nominální napětí a ρ je poloměr zakřivení kořene vrubu.

Pro platnost tohoto vztahu z numerického řešení pro výpočet faktoru intenzity napětí byla zjištěna velikost vedlejší poloosy elipsy $b = 1$ [mm] viz Obr 18. Byl dopočítán součinitel koncentrace napětí vztahem (1.3) $\alpha_t = 2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{\rho}}\right) = 21$ [-]. A dosazením do vztahu (10.1) vyjde faktor intenzity napětí $K_I = 18,61$ [$MPa\sqrt{m}$]. Od analytického řešení se liší odchylkou 2,7 %.



Obr. 18 Vznik elipsy při zatížení tahovým napětím desky s trhlinou

11 Závěr

Bakalářská práce se zabývá souvislostí mezi faktorem intenzity napětí a součinitelem koncentrace napětí v případě nekonečné desky s eliptickým otvorem. Byl proveden analytický rozbor teoretického součinitele koncentrace napětí a faktoru intenzity napětí. Byly uvažovány pouze tahová napětí v ose y , kolmo na hlavní poloosu elipsy, popřípadě trhlinu. Pro všechny modely jsou stejné hodnoty zatížení $\sigma = 100$ [MPa]. Práce se zabývá srovnáním analytického a numerického výpočtu. Numerický výpočet byl proveden v programu Patran 2014.

První část bakalářské práce se zabývá analytickým a numerickým výpočtem teoretického součinitele koncentrace napětí, který byl proveden pro osm různých druhů geometrií vrubů. Postupně jsou geometrie vrubu upravovány, a to tak, že nejprve je výpočet řešený pro otvor ve tvaru kružnice, poté pro elipsu s poměrem stran $\frac{b}{a} = 0,9$ atd. Největší hodnota teoretického součinitele nabývá pro poměr stran elipsy $\frac{b}{a} = 0,3$ a dosahuje hodnoty $\alpha_t = 7,667$ [-] pro hlavní vrchol elipsy u analytického řešení a hodnoty 7,68 [-] u numerického řešení. Při tomto poměru stran je zde také vyhodnocena nejnížší odchylka a to 0,169 [%]. Naopak nejnížší hodnota teoretického součinitele koncentrace napětí dosahuje hodnoty $\alpha_t = 3$ [-] u analytického řešení a to pro kruhový otvor v nekonečné desce. U numerického řešení nabývá teoretický součinitel koncentrace napětí hodnot $\alpha_t = 3,08$ [-]. Vypočtená odchylka je 2,66 [%]. Koncentrace napětí pro vedlejší vrchol elipsy nezávisí na geometrii vrubu a vždy má hodnotu -1. Maximální odchylka je 5,7 [%] a to v poměru stran elipsy $\frac{b}{a} = 0,6$, výsledky se tedy dají považovat za přijatelné. Velikost odchylky může být zapříčiněna numerickou chybou.

Druhá část je zaměřená na analytický a numerický výpočet faktoru intenzity napětí. Geometrie modelu je deska s trhlinou (viz Obr. 10), zatížená tahovým napětím $\sigma = 100$ [MPa]. U numerického výpočtu byl faktor intenzity napětí počítán přes hnací sílu trhliny G . Faktor intenzity napětí u analytického řešení, pro danou geometrii, nabývá hodnoty $K_I = 18,122$ [$MPa\sqrt{m}$]. Hnací síla trhliny u numerického řešení je $G = 1.552$ [MN/m]. A pro přepočet při rovinné napjatosti vztahem (8.1) je výsledná hodnota faktoru intenzity napětí $K_I = 18,053$ [$MPa\sqrt{m}$]. Naměřená odchylka mezi analytickým a numerickým řešením je 0,38 [%]. Tento výsledek považujeme za přesný.

Na závěr bakalářské práce je řešena souvislost mezi teoretickým součinitelem koncentrace napětí a faktorem intenzity napětí při eliptickém otvoru v nekonečné desce. Tato souvislost je dána Irwin-Neuberovým vztahem (10.1) a platí u velmi štíhlých elips. Pro platnost vztahu byla z modelu desky s trhlinou, zatíženou tahovým napětím $\sigma = 100$ [MPa], vyhodnocena vzdálenost vedlejší poloosy elipsy po deformaci trhliny v elipsu. S pomocí této vzdálenosti byl spočítán teoretický součinitel koncentrace napětí a bylo dosazeno do vzorce (10.1). Výsledná hodnota faktoru intenzity napětí nabývala hodnoty $K_I = 18,61 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]$. Ve srovnání s analytickým výpočtem se tato hodnota liší s odchylkou 2,7 [%]. Můžeme tento výsledek považovat za přesný. Se zmenšujícím se poloměrem zakřivení kořene vrubu ρ platí právě tato souvislost mezi faktorem intenzity napětí a součinitelem koncentrace napětí.

Seznam použité literatury

- [1] Lenert Jiří. *Pružnost a pevnost I*. 3.vyd. Ostrava: VŠB – TU Ostrava, 2009, 142 s. ISBN 978-80-248-2111-5.
- [2] Fusek Martin.; Halama Radim.; Adámková Ludmila. *Základy lomové mechaniky*. Ostrava: VŠB – TU Ostrava, 2010, [online], [cit. 2015-05-18]. Dostupné z: <http://www.fs.vsb.cz/export/sites/fs/330/.content/files/prednaska1.pdf>
- [3] Höschl Cyril. *Únava materiálu při periodickém zatěžování*. Praha, 1981 [online], [cit.2015-05-18]. Dostupné z: http://www.it.cas.cz/files/skripta/12_UNAVA_%20MATERIALU_PRI_PERIOD_ZATEZOVANI-ocr.pdf
- [4] Pilkey W.; Pilkey D. *Peterson's Stress Concentration Factors*. 3rd ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008, 50 p. ISBN 978-0-470-04824-5
- [5] Hutař Pavel.; Náhlík Luboš. *Základy lomové mechaniky*. Brno, [online], [cit. 2015-05-18]. Dostupné z: <http://hutar.wz.cz/lomovka/08.pdf>
- [6] Vlach R. *Základy lomové mechaniky*, VUT FSI, Ústav Materiálových Věd a Inženýrství, 13 s., [online]. Dostupné z: <http://ime.fme.vutbr.cz/files/vyuka/GS0/06%20-%20Lomova%20mechanika.doc>
- [7] Fusek Martin.; Halama Radim.; Adámková Ludmila. *Základy lomové mechaniky*. Ostrava: VŠB – TU Ostrava, 2010, [online], [cit. 2015-05-18]. Dostupné z: <http://www.fs.vsb.cz/export/sites/fs/330/.content/files/prednaska3.pdf>
- [8] Brožovský Jiří.; Materna Alois. *Základy matematické teorie pružnosti*. Ostrava, 2012 [online], [cit.2015-05-08]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/mat_teorie_pruznosti.pdf
- [9] Fusek Martin.; Rojíček Jaroslav. *Podklady do předmětu MKP I*. Ostrava: VŠB – TU Ostrava, [online], [cit. 2015-05-18]. Dostupné z: <https://www.dropbox.com/sh/54s7do5r0r8y0/AABONG5Baoz76m95nZlSe3gOa/Literatura/Podklady%20do%20p%C5%99edm%C4%9Btu%20MKP1.pdf?dl=0>

- [10] Kučera Josef. *Stručný úvod do mechaniky lomu část I*. Ostrava: VŠB – TU Ostrava, 1997, ISBN 80-7078-218-9